

# АНАЛИЗ ИСКЛЮЧЕННОГО ОБЪЕМА ДЛЯ ЛОРЕНЦОВСКИ СЖАТЫХ ТВЕРДЫХ СФЕР

П. В. Олейник<sup>1, а</sup>, К. А. Бугаев<sup>2,3, б</sup>

<sup>1</sup> *Национальный технический университет Украины  
«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»,  
Физико-технический институт*

<sup>2</sup> *Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова НАН Украины, Киев, Украина*

<sup>3</sup> *Физический факультет Киевского национального университета им. Тараса Шевченка, Киев, Украина*

## Аннотация

В настоящей работе проанализировано ранее полученное приближенное выражение для исключенного объема двух Лоренцовски сжатых твердых сфер. Нам удалось существенно улучшить точность приближения этой формулы довольно простым способом.

*Ключевые слова:* второй вириальный коэффициент, Лоренцово сокращение, твердые сферы

## Введение

Уравнение состояния Ван дер Ваальса (ВдВ) успешно используется для описания выходов адронов в ядро-ядерных соударениях при высоких энергиях [1, 2, 3]. Данная модель рассматривает адроны как твердые сферы и таким образом позволяет учесть отталкивание между адронами на малых расстояниях. Однако в релятивистской ситуации необходимо учитывать Лоренцово сокращение собственных объемов частиц, поскольку специальная теория относительности запрещает существование абсолютно твердых тел. Несмотря на многочисленные феноменологические попытки учесть эффекты Лоренцова сокращения для газа твердых сфер, только в 2000 году было получено строгое обобщение традиционных кластерного и вириального разложений на случай потенциалов взаимодействия, которые зависят от импульсов частиц [4]. Однако оказалось, что релятивизированное уравнение состояния ВдВ, полученное традиционной экстраполяцией из вириального разложения, ведет только к уменьшению исключенного объема частиц (второй вириальный коэффициент) в пределе высоких давлений, но не к его полному исчезновению [5]. Как показано в работе [5], этот факт немедленно ведет к причинному парадоксу, поскольку при не слишком высоких плотностях упаковки скорость звука такой системы превышает скорость света.

Учет релятивистских эффектов для отталкивающего взаимодействия типа твердого кора может быть важным для модифицированной модели Валечки [6], для различных обобщений модели Намбу-Йона-Лазинио [7], модели кварк-мезонного взаимодействия [8], для киральной  $SU(3)$  модели [9] и т.д.

Очевидно, что релятивистское отталкивание типа твердого кора может быть важным для любой эффективной модели уравнения состояния, в которой сильное взаимодействие уменьшает массу частиц по сравнению с их вакуумными значениями. Тем не менее до настоящего времени эти эффекты не были включены в упомянутые выше модели из-за громоздкости формализма, предложенного в работе [5].

Вместе с тем, совершенно недавно была предложена концепция индуцированного поверхностного натяжения [10, 11, 12], уравнение состояния которой известно как модель адронного резонансного газа [11, 12], позволило описать адронные множественности с беспрецедентной точностью во всем интервале энергий соударения в системе центра масс от  $\sqrt{s} = 2.7$  ГэВ (AGS BNL) до  $\sqrt{s} = 2.76$  ТэВ (LHC CERN) с качеством фита  $\chi^2/dof = 1.08$  [11]. Однако для использования модели адронного резонансного газа в качестве уравнения состояния в области фазового перехода к фазе кварк-глюонной плазмы, т.е. при высоких плотностях упаковки, необходимо, во-первых, выйти за рамки классического приближения ВдВ и учесть, по крайней мере, 3-й и 4-й вириальный коэффициенты смеси адронов, и, во-вторых, для этого также абсолютно необходимо учесть эффекты Лоренцова сокращения собственных объемов частиц [12]. И, если первая из этих задач отчасти уже решена в работах [11, 12], то вторая из этих задач пока еще далека от своего решения.

Поэтому в данной работе мы анализируем приближенную формулу для исключенного объема Лоренцовски сжатых сфер, выведенную в ультрарелятивистском пределе в [5], и существенно улучшаем ее для дальнейшего использования в модели адронного резонансного газа [11, 12].

<sup>а</sup>pablackof@gmail.com

<sup>б</sup>Bugaev@th.physik.uni-frankfurt.de

## 1. Второй вириальный коэффициент для газа Лоренцовски сжатых твердых сфер

Как показано в работе [5], для вывода уравнения состояния Лоренцовски сжатых сфер необходимо иметь удобное и достаточно простое выражение для исключенного объема таких частиц. В работе [13] проанализировано несколько приближенных выражений для данной величины, но в настоящей работе мы используем наиболее простую формулу

$$2v_{kl}^{Urel}(\Theta_v) = \frac{4}{3}\pi \frac{R_k}{\gamma_k} \left( R_k + R_l \cos^2 \left( \frac{\Theta_v}{2} \right) \right)^2 + \frac{4}{3}\pi \frac{R_l}{\gamma_l} \left( R_l + R_k \cos^2 \left( \frac{\Theta_v}{2} \right) \right)^2 + 2\pi a R_k R_l (R_k + R_l) \left| \sin(\Theta_v) \right|, \quad (1)$$

которая была получена в работе [5] с параметром  $a = 1$  в ультрарелятивистском пределе, т.е. для двух тонких дисков. Однако, как показывает численный анализ, введение коэффициента  $a \simeq 0.775$  позволяет воспроизвести и предел двух нерелятивистских сфер, поскольку

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} d\Theta_v \sin(\Theta_v) 2v_{kl}^{Urel}(\Theta_v) &= 2v_{kl}^{Nrel} \equiv \\ &\equiv \frac{4}{3}\pi(R_k + R_l)^3. \end{aligned} \quad (2)$$

В уравнениях (1) и (2)  $R_l$  – это радиус твердого тела сферической частицы сорта  $l$  в системе ее покоя,  $\gamma_l = \frac{\sqrt{m_l^2 + k_l^2}}{m_l}$  – релятивистский  $\gamma$ -фактор частицы с массой  $m_l$ , которая в системе покоя термостата имеет 3-импульс  $k_l$ , а азимутальный угол  $\Theta_v$  – это угол между 3-импульсами частиц  $k$  и  $l$ , причем, как и в работе [5], в импульсном пространстве ось  $OZ$  направлена вдоль 3-импульса частицы сорта  $k$ . Однако следует помнить о том, что формула (1) применима только для углов:  $-\frac{\pi}{2} \leq \Theta_v \leq \frac{\pi}{2}$ . Поэтому на практике при интегрировании по сферическому углу  $\Theta_v$  его надо выполнять по интервалу  $\Theta_v \in [0; \frac{\pi}{2}]$ :

$$\int_0^{\pi} d\Theta_v \sin(\Theta_v) \dots = 2 \int_0^{\pi/2} d\Theta_v \sin(\Theta_v) \dots \quad (3)$$

Как видно из верхней панели Рис. 1 приближенный результат для двух нерелятивистских сфер (пунктирная линия), полученный из уравнения (1), отличается от точного (сплошная линия) на 5–10% на узком интервале углов  $\Theta_v \in [1.25; 1.57]$ . Но это отличие компенсируется за счет того, что на интервале углов  $\Theta_v \in [0.3; 1]$  также есть небольшое отличие. В результате площадь под сплошной кривой и под пунктирной одинаковы.

Анализ уравнения (1), проведенный в работе [5], показал, что при правильной экстраполяции уравнения состояния Ван дер Ваальса (ВдВ) на большие плотности последнее слагаемое в правой части уравнения (1) вклада не дает, поскольку конфигурации с  $\Theta_v \neq 0$  сильно подавлены. Причина этого хорошо

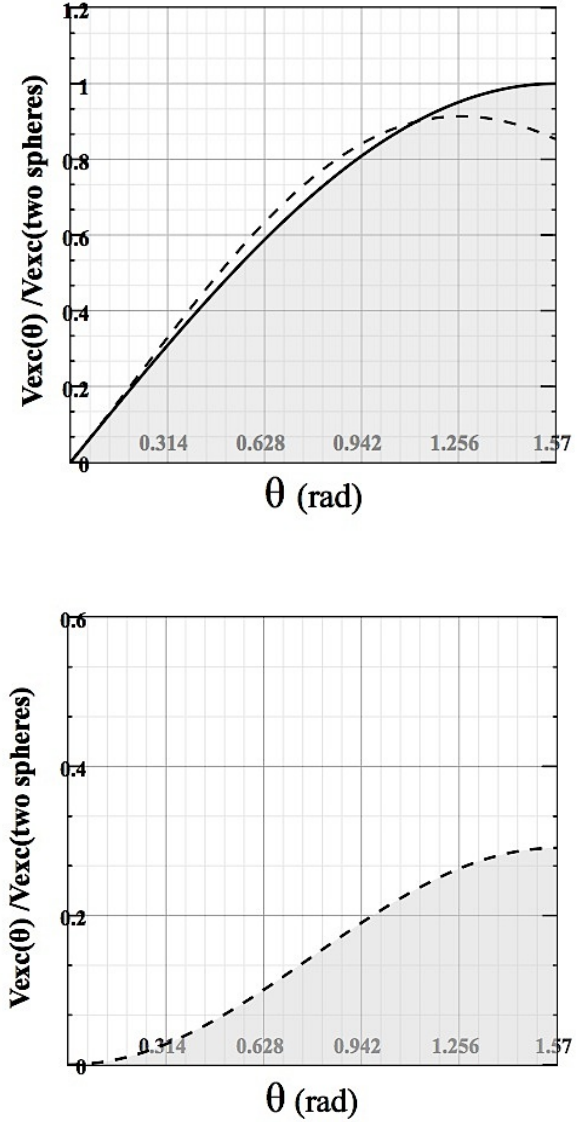


Рис. 1. Исключенный объем  $2v_{12}^{Urel}(\Theta_v) \sin(\Theta_v)$  двух Лоренцовски сжатых твердых сфер в единицах исключенного объема двух нерелятивистских твердых сфер  $2v_{12}^{Nrel}$  радиуса  $R_1 = R_2 = 0.39$  фм как функция угла между 3-векторами импульсов частиц. *Верхняя панель* демонстрирует нерелятивистский предел  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$  (для двух сфер). Сплошная линия – это точный результат, пунктирная линия получена из уравнение (1). *Нижняя панель* показывает ультрарелятивистский предел  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1000$  (для двух тонких дисков).

видна из Рис. 1. Действительно, поскольку в ультрарелятивистском пределе для двух частиц  $\gamma_1 = \gamma_2 \gg 1$  относительный исключенный объем  $v_{12}^{Urel}(\Theta_v)/v_{12}^{Nrel}$ , показанный на Рис. 1, исчезающе мал для коллинеарного расположения 3-импульсов частиц и конечен в случае их перпендикулярного расположения, то при больших давлениях  $p$  вероятность состояний с  $v_{12}^{Urel}(\Theta_v)/v_{12}^{Nrel} > 0$  и  $\frac{p v_{12}^{Urel}(\Theta_v)}{T} \gg 1$  будет исчезающе мала, т. к. в этом случае  $\exp \left[ -\frac{p v_{12}^{Urel}(\Theta_v)}{T} \right] \rightarrow 0$ .

Поэтому введение коэффициента  $a \simeq 0.775$  не приводит к модификации уравнения состояния в ультрарелятивистском пределе, но позволяет точно воспроизвести нерелятивистский предел. Оценим отклонение выражения (1) от точного значения для случая бесконечно тонкого диска и сферы, т.е. для случая, когда одна сфера нерелятивистская, а другая ультрарелятивистская. Для упрощения вычислений примем, что  $R_k = R_l = R_1$ . Тогда точное значение  $v_{sd} = \frac{(10+3\pi)}{3}\pi R_1^3 = \frac{(10+3\pi)}{32}(2v_{12}^{Nrel}) \simeq 0.607(2v_{12}^{Nrel})$  (заштрихованная область на Рис. 2), а приближенное выражение (1) дает

$$\int_0^{\pi/2} d\Theta_v \sin(\Theta_v) 2v_{11}^{Urel}(\Theta_v, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = \infty) \simeq 0.6137(2v_{12}^{Nrel}), \quad (4)$$

что отличается от точного результата всего на 1.1%! Это значит, что введение коэффициента  $a \simeq 0.775$  существенно улучшает точность приближенной формулы (1) и в этом, промежуточном случае. Причину этого легко увидеть из Рис. 2, на котором показана функция  $v_{11}^{Urel}(\Theta_v, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = \infty)/v_{12}^{Nrel}$  для тех же радиусов, что приведены на Рис. 1.

## 2. Обсуждение результатов

Вводя собственный объем  $v_j$ , собственную поверхность  $s_j$  и собственный периметр  $c_j$  частицы сорта  $j$ , уравнение (1) можно переписать в следующих обозначениях

$$2v_{kl}^{Urel}(\Theta_v) = \hat{v}_k + \hat{s}_k(\Theta_v)R_l + \hat{c}_k(\Theta_v)R_l^2 + \hat{v}_l + \hat{s}_l(\Theta_v)R_k + \hat{c}_l(\Theta_v)R_k^2, \quad \text{where } \hat{v}_k \equiv \frac{v_k}{\gamma_k}, \quad (5)$$

$$\hat{s}_k(\Theta_v) \equiv s_k \left[ \frac{2}{3\gamma_k} \left( 1 + \frac{\Delta_{c1}}{2} \right) + \frac{a}{2} \left| \sin(\Theta_v) \right| \right], \quad (6)$$

$$\hat{c}_k(\Theta_v) \equiv c_k \frac{2}{3\gamma_k} \left( 1 + \frac{\Delta_{c1}}{2} + \frac{\Delta_{c2}}{4} \right), \quad (7)$$

$$\Delta_{c1} \equiv \cos(\Theta_v) - 1, \quad \Delta_{c2} \equiv [\cos(\Theta_v)]^2 - 1, \quad (8)$$

$$v_j = \frac{4}{3}\pi R_j^3, \quad s_j = 4\pi R_j^2, \quad c_j = 2\pi R_j. \quad (9)$$

Интересно отметить тот факт, что второй вириальный коэффициент, который следует из уравнения (5), можно рассматривать в качестве обобщения известной формулы, полученной впервые А. Исихарой [14]. Действительно, стандартное определение второго вириального коэффициента для Лоренцовски сжатых сфер имеет вид [5]

$$a_{ij}^{Urel} \equiv \int \frac{dk_l k_l^2}{(2\pi\hbar)^3} e^{-\frac{\sqrt{m_l^2+k_l^2}}{T}} \int \frac{dk_j k_j^2}{(2\pi\hbar)^3} e^{-\frac{\sqrt{m_j^2+k_j^2}}{T}} \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\Theta_v \sin(\Theta_v) v_{ij}^{Urel}(\Theta_v) \left[ \int \frac{dk_l k_l^2}{(2\pi\hbar)^3} e^{-\frac{\sqrt{m_l^2+k_l^2}}{T}} \times \int \frac{dk_j k_j^2}{(2\pi\hbar)^3} e^{-\frac{\sqrt{m_j^2+k_j^2}}{T}} \right]^{-1}, \quad (10)$$

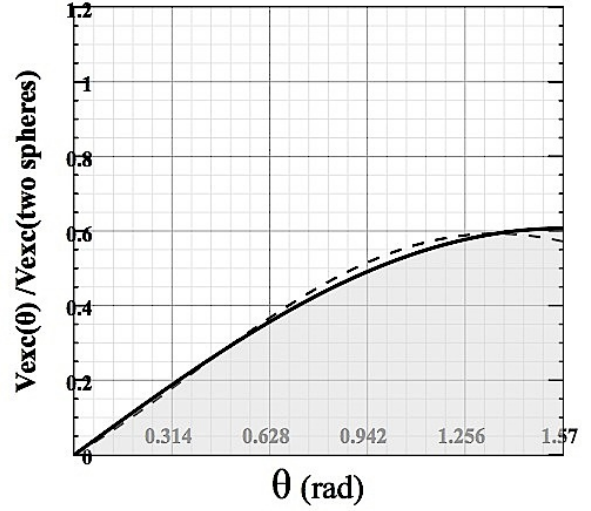


Рис. 2. Исклученный объем  $2v_{12}^{Urel}(\Theta_v) \sin(\Theta_v)$  двух Лоренцовски сжатых твердых сфер в единицах исклученного объема двух нерелятивистских твердых сфер  $2v_{12}^{Nrel}$  радиуса  $R_1 = R_2 = 0.39$  фм как функция угла между 3-векторами импульсов частиц показан в пределе сферы  $\gamma_1 = 1$  и тонкого диска  $\gamma_2 = 1000$ . Сплошная кривая – точный результат, а пунктирная – с использованием формулы (1) для  $a = 0.775$

т.е. структура разделения выражения (1) на объемные и поверхностные слагаемые и вклад периметра останется прежней и для коэффициентов  $a_{ij}^{Urel}$ . С другой стороны, формула для второго вириального коэффициента выпуклых молекул имеет вид ( $A \in [0; 1]$ )

$$a_{ll}^{mol} = v_l + 3s_l \frac{R_{c1} + R_{c2}}{2} = v_l + \frac{3}{2} A s_l (R_{c1} + R_{c2}) + 3(1-A)(c_1 R_l^2 + c_2 R_l^2), \quad (11)$$

где  $R_l$  – это средний радиус частицы, который следует из ее собственной поверхности  $s_l = 4\pi R_l^2$ , а  $R_{c1}$  и  $R_{c2}$  – средние радиусы кривизны частицы, а величины  $c_k = 2\pi R_{ck}$  – это аналоги периметра. В формулу (11) мы ввели вспомогательный параметр  $A$ . Наличие свободного параметра  $A$  в уравнении (11) показывает, что существует бесконечное количество коэффициентов  $\frac{3}{2}A$  и  $3(1-A)$ , определяющих вклады собственной поверхности и собственного периметра, которые воспроизводят одно и то же значение второго вириального коэффициента  $a_{ll}^{mol}$ . Кроме этого, формула (11) также демонстрирует смысл слагаемых собственного периметра: это только в случае сфер они связаны с радиусом твердого тела, а в общем случае они определяются радиусами кривизны.

Теперь также очевидно, что уравнение (11) для  $a_{ll}^{mol}$  очень напоминает и выражение (5) для  $v_{ij}^{Urel}$ , и формулу (10) для коэффициента  $a_{ij}^{Urel}$ . Такое сходство позволяет нам надеяться на то, что аналогичная структура второго вириального коэффициента является довольно общей и поэтому может быть использована для формулировки уравнения состояния

не только сжатых сфер, но и молекул более сложной формы.

## Выводы

В данной работе мы исследовали и улучшили формулу исключенного объема двух Лоренцовски сжатых твердых сфер. Нами было найдено подобие между полученной формулой и известной формулой, полученной А. Исихарой в 1950 г. для второго вириального коэффициента выпуклых молекул. Более того, полученную нами формулу исключенного объема можно рассматривать в качестве обобщения результата Исихары.

**Благодарности.** Авторы благодарны Б. Е. Гринюку и Э. Г. Никонову за полезные обсуждения и важные замечания. К.А.Б. благодарен Национальной Академией Наук Украины за финансовую поддержку его работы в рамках темы «Структура и динамика статистических и квантово-полевых систем» No 0117U000240.

## Перечень использованных источников

1. K. A. Bugaev et al. Thermodynamically anomalous regions and possible new signals of mixed-phase formation // *Eur. Phys. J. A.* — 2016. — Vol. 52, no. 6. — P. 175–189.
2. K. A. Bugaev et al. New Signals of Quark-Gluon-Hadron Mixed Phase Formation // *Eur. Phys. J. A.* — 2016. — Vol. 52, no. 8. — P. 227–232.
3. K. A. Bugaev et al. Threshold Collision Energy of the QCD Phase Diagram Tricritical Endpoint // *Phys. Part. Nucl. Lett.* — 2018. — Vol. 15, no. 3. — P. 210–224.
4. K. A. Bugaev, M. I. Gorenstein, H. Stöcker and W. Greiner. Van der Waals Excluded Volume Model for Lorentz Contracted Rigid Spheres // *Phys.Lett. B.* — 2000. — Vol. 485. — P. 121–125.
5. K. A. Bugaev. The Van-der-Waals gas EOS for the Lorentz contracted spheres // *Nucl. Phys. A.* — 2008. — Vol. 807. — P. 251–268.
6. D. H. Rischke, M. I. Gorenstein, H. Stöcker and W. Greiner. Excluded volume effect for the nuclear matter equation of state // *Z. Phys. C.* — 1991. — Vol. 51. — P. 485–489.
7. Y. Nambu, G. Jona-Lasinio. Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity // *Phys. Rev.* — 1961. — Vol. 122. — P. 345–358.
8. P. A. M. Guichon. A possible quark mechanism for the saturation of nuclear matter // *Phys. Lett. B.* — 1988. — Vol. 200. — P. 235–240.
9. P. Papazoglou. Chiral Lagrangian for strange hadronic matter // *Phys.Rev. C.* — 1998. — Vol. 57. — P. 2576–2588.
10. V. V. Sagun, A. I. Ivanytskyi, K. A. Bugaev and I. N. Mishustin. The statistical multifragmentation model for liquid-gas phase transition with a compressible nuclear liquid // *Nucl. Phys. A.* — 2014. — Vol. 924. — P. 24–46.
11. K. A. Bugaev et al. Going beyond the second virial coefficient in the hadron resonance gas model // *Nucl. Phys. A.* — 2018. — Vol. 970. — P. 133–155.
12. V. V. Sagun et al. Hadron resonance gas model with induced surface tension // *Eur. Phys. J. A.* — 2018. — Vol. 54. — P. 100–115.
13. D. R. Oliinychenko, K. A. Bugaev, A. S. Sorin. Investigation of hadron multiplicities and hadron yield ratios in heavy ion collisions // *Ukr. J. Phys.* — 2013. — Vol. 58. — P. 211–227.
14. Isihara A. Determination of Molecular Shape by Osmotic Measurement // *J. of Chem. Phys.* — 1950. — Vol. 18. — P. 1446–1449.